Αλγεβρικές Δομές Ι

27 Σεπτεμβρίου 2018

1. (1 μονάδα) Δείξτε ότι μια ομάδα G είναι Αβελιανή αν και μόνο αν η απεικόνιση $\phi(g) = g^2$ από το G στο G είναι ομομορφισμός ομάδων.

2. (1 μονάδα) Θεωρούμε τα ακόλουθα στοιχεία της S_{10}:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 7 & 8 & 6 & 9 & 1 & 2 & 10 & 4 \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 7 & 6 & 10 & 2 & 8 & 5 & 4 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

   (1΄) Να υπολογιστεί η μετάθεση τ^{2019}.

   (2΄) Να βρεθεί $x \in S_{10}$ ώστε: $x \circ \tau \circ x^{-1} = \sigma$.

3. (1 μονάδα) Βρείτε μια υποομάδα της S_{11} τάξης 28 και δείξτε ότι η S_{11} δεν έχει υποομάδα τάξης 17.

4. (1 μονάδα) Βρείτε όλες τις υποομάδες της ομάδας $\mathbb{Z}_{45}$ και σχεδιάστε το διάγραμμα Hasse των υποομάδων της.

5. (1 μονάδα) Δείξτε ότι η $H = \langle ([2]_4, [4]_6) \rangle$ είναι κανονική υποομάδα της $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ και βρείτε με ποιά γνωστή σας ομάδα είναι ισόμορφη η $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 / H$.

6. (1 μονάδα) Δείξτε ότι η ομάδα $U(\mathbb{Z}_{25})$ είναι κυκλική και βρείτε όλους τους γεννήτορές της.

7. (1 μονάδα) Βρείτε όλους τους ομομορφισμούς ομάδων από το $\mathbb{Z}_{35}$ στο $\mathbb{Z}_{21}$. Ποιοί από αυτούς είναι και ομομορφισμοί δακτυλίων ;

8. (1 μονάδα) Να εξετάσετε αν οι ομάδες $A_4 \times \mathbb{Z}_3, S_3 \times S_3$ είναι ισόμορφες.

9. (1 μονάδα) Δώστε ένα παράδειγμα μιας ακεραίας περιοχής και ενός γνήσιου ιδεώδους της έτσι ώστε ο δακτύλιος πηλίκο να έχει διαιρέτες του μηδενός.

10. (1 μονάδα) Αποδείξτε ότι κάθε ομάδα πηλίκο κυκλικής ομάδας είναι κυκλική.

Καλή επιτυχία